Session de 1975

CONCOURS SPECIAL DE RECRUTEMENT
AUX GRANDES ECOLES SCIENTIFIQUES

M A T H E M A T I Q U E S II

Soient deux trièdres orthonormés positifs de même origine O. Le premier Oxyz [ou (R)] est dit absolu [vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$]. Le second OXYZ [ou (S)] est dit relatif [vecteurs unitaires $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$].

(S) est animé par rapport à (R) d'un mouvement de rotation uniforme autour de Oz :

$\vec{K} = \vec{k}$; $(\vec{i}, \vec{I}) = (\vec{j}, \vec{J}) = \varphi = \omega t$ [ω est la mesure de la vitesse angulaire constante ; t est le temps].

Un point M est en mouvement par rapport à (S) ; ce mouvement est circulaire uniforme de vitesse angulaire ω (même constante ω que ci-dessus). Les coordonnées relatives sont données par :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

, a constante positive est la mesure d'une longueur.

I a) Ecrire la matrice de passage G, permettant le calcul des coordonnées absolues de M, à partir de ses coordonnées relatives :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Vérifier que ces coordonnées absolues sont :

$$(1)\ M \begin{cases} x = a\,(\cos\varphi + \sin^2\varphi) \\ y = a\,(\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) \\ z = a\cos\varphi \end{cases} \qquad (\varphi = \omega t)$$

On obtient par (1) un paramètrage de la trajectoire absolue (L) du mobile M. Vérifier que (L) est située sur chacune des deux surfaces (Σ) et (Σ') d'équations cartésiennes :

(Σ) $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$. (Σ') $(x - a)^2 + y^2 = (z - a)^2$.

Reconnaître la nature de (Σ) et (Σ'). Quelle est la période T du mouvement ?

b) Montrer qu'il existe deux vecteurs $\vec{\Omega}_1$ et $\vec{\Omega}$, dont on donnera les composantes relatives (constantes) tels que :

(2) $\vec{V}_r = \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{OM}$ et (3) $\vec{V} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$,

$\vec{V}_r$ et $\vec{V}$ étant les vecteurs vitesse relative et vitesse absolue de M.

(Le symbole $\wedge$ représente un produit vectoriel). Donner, en fonction des coordonnées relatives (X, Y, Z) (et de la constante ω) les composantes relatives (V_X, V_Y, V_Z) du vecteur vitesse absolue $\vec{V}$ de M.

II - Soit $\vec{\Gamma}$ le vecteur accélération absolue de M.

a) En utilisant le <u>théorème de la composition des accélérations</u>, trouver les composantes relatives (Γ_X, Γ_Y, Γ_Z) de $\vec{\Gamma}$ en fonction des coordonnées relatives (X, Y, Z) de M (et de ω).

b) Partant <u>directement de (3)</u> montrer que :

$$\vec{\Gamma} = -2\,\omega^2\,\overrightarrow{PM} + \left[\omega^2 \vec{J} \wedge \overrightarrow{OM}\right]$$

où P est la projection orthogonale de M sur la droite (D) $\begin{cases} X = Z \\ Y = 0 \end{cases}$

[On admettra la formule du double produit vectoriel :

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = (\vec{A}.\vec{C})\,\vec{B} - (\vec{B}.\vec{C})\,\vec{A}\ ]$$

(Le symbole . représente un produit scalaire).

III - Soit le point m projection orthogonale de M sur le plan z = 0 ; il parcourt la courbe (ℓ) projection de (L). Montrer que m est la projection orthogonale du point fixe O_1 ($\overrightarrow{OO_1} = a\,\vec{i}$) sur la tangente, d'équation

$x \cos \varphi + y \sin \varphi = a$, au cercle $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$

Utiliser ce résultat pour construire avec soin la courbe (ℓ).

IV - Calculer $\|\vec{V}\|$ à l'instant t. Calculer la longueur de la courbe fermée (L).

V a) Calculer $xdy - ydx = g(\varphi)\,d\varphi$.

b) Soit $\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}$. Montrer que $\vec{\sigma} = 2a^2\vec{\Omega} - [\vec{\Omega}.\overrightarrow{OM}]\overrightarrow{OM}$. En déduire la composante σ_z de $\vec{\sigma}$ suivant Oz et vérifier le résultat du § V.a.

c) Calculer l'aire intérieure à (ℓ).

VIa) t variant de 0 à T, dans quels intervalles de temps le mouvement absolu de M est-il accéléré ? retardé ?

b) Calculer, <u>aussi simplement que possible</u>,

$$I = \int_0^{\frac{T}{6}} \vec{V}.\vec{\Gamma}\,dt$$

VII Soit B le point de (R) qui coïncide avec M à l'instant $\frac{T}{2}$

[$\overrightarrow{OB} = -a\vec{i} - a\vec{k}$] [ou : $\overrightarrow{OB} = a\vec{I} - a\vec{K}$]

a) Déterminer <u>pour le point B</u>, dans OXYZ, puis dans Oxyz, les équations cartésiennes de la tangente, du plan osculateur (Π), (en ce point) à (L).

b) Calculer le rayon de courbure ρ de (L) au point B.

c) $\vec{N}$ étant le vecteur unitaire de la normale principale dirigée dans le sens des z croissants, soit C défini par $\overrightarrow{BC} = \rho\vec{N}$ Montrer que C est la projection orthogonale de l'origine O sur (Π).

VIII Soit A le point de (R) qui coïncide avec M à l'instant t = 0

$[\overrightarrow{OA} = a\vec{i} + a\vec{k}]$

a) $\overrightarrow{OM}$ variant dans (R) soit $\overrightarrow{f(\varphi)} = \overrightarrow{OM}$. Donner le développement limité jusqu'au terme en φ^4 de cette fonction vectorielle, au voisinage de $\varphi = 0$.

b) Donner les équations cartésiennes de la tangente $A\mathcal{T}$ en A à (L) et du plan osculateur en A à (L).

c) Prenant le point M_n de paramètre $\varphi = \frac{\pi}{n}$, sur (L), soit d_n la distance de M_n à la droite $A\mathcal{T}$.

La série $\sum_1^\infty d_n$ est-elle convergente ou divergente ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail